

Lista 3 (poziom rozszerzony)

Zad. 1 (3 pkt.) Rozwiąż nierówność $\sin^3 x \cos x - \cos^3 x \sin x < \frac{1}{4}$, gdzie $x \in [0, 2\pi]$.

Zad. 2 (3 pkt.) Udowodnij, że dla dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c prawdziwa jest nierówność

$$(a + b + c)(1/a + 1/b + 1/c) \geq 9.$$

Zad. 3 (3 pkt.) Zbadaj monotoniczność funkcji $f(x) = 1/3 x^3 + x^2 - 8x + 7$.

Zad. 4 (3 pkt.) Wykaż, że jeżeli $x \in (0, 1)$ oraz $y > 1$ to spełniona jest nierówność

$$\log_x y + 1/4 \log_y x + 1 \leq 0.$$

Zad. 5 (3 pkt.) Prosta przechodząca przez punkty $P_1 = (-6, 17)$ oraz $P_2 = (-9, -4)$ jest styczna do okręgu o środku w punkcie $S = (-1, 2)$. Oblicz współrzędne punktu styczności prostej i okręgu oraz promień tego okręgu.

Zad. 6 (4 pkt.) Wyznacz długość przekątnej KM deltoidu KLMN wiedząc, że kąty KLM, LMN i KNM są sobie równe oraz $|KL| = 4$ i $|LM| = 5$.

Zad. 7 (4 pkt.) Ciąg arytmetyczny (x, y, z, w) jest czterowyrazowym ciągiem rosnącym. Kwadrat największego wyrazu tego ciągu jest równy podwojonej sumie kwadratów pozostałych wyrazów tego ciągu. Oblicz x, y, z, w , jeżeli liczby $x + 75, y, z$ są trzema kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego.

Zad. 8 (4 pkt.) Trapez $ABCD$ jest podstawą ostrosłupa czworokątnego oraz kąt ABC ma miarę 30° . Ramiona trapezu mają długości $|AD|=10$ oraz $|BC|=16$. Oblicz objętość tego ostrosłupa wiedząc, że każda ze ścian bocznych tego ostrosłupa tworzy z płaszczyzną podstawy kąt, którego tangens wynosi $9/2$.

Zad. 9 (4 pkt.) Zlecono projekt ekranu smartfona o powierzchni 60 cm^2 . Odległości ekranu smartfona od jego krótszych brzegów muszą być równe $1/2 \text{ cm}$, a odległości od dłuższych brzegów mają być równe $3/10 \text{ cm}$. Jakie wymiary powinien mieć ekran, aby powierzchnia tego ekranu razem z obramowaniem była jak najmniejsza.

Zad. 10 (5 pkt.) Rozważmy wszystkie trójkąty równoramienne o obwodzie równym 18 . Oblicz długości boków tego z trójkątów, który ma największe pole. Oblicz to największe pole.